BEBERAPA IDENTITAS PADA GENERALISASI BARISAN FIBONACCI

Sri Melati[1*], Mashadi[2], Musraini M[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*srimelati92@gmail.com

ABSTRACT

We discuss some identities of generalized Fibonacci sequence, (u_n), which satisfies linear homogeneous recurrence relations of order two having a non-zero constant coefficient. Then given some matrices, we show that the n-power of these matrices provide some identities for $\sum_{i=0}^{n} u_i^2$, $u_n u_{n+2}$, and $\sum_{i=0}^{n} u_n u_{n+1}$. At the end we give generating functions for $u_n u_{n+1}$ and $u_n u_{n+2}$.

Keywords: *Fibonacci sequence, generating function, Lucas sequence, Vandermonde matrix.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas beberapa identitas generalisasi barisan Fibonacci, (u_n), yang memenuhi relasi berulang linear homogen berorde dua dengan koefisien bilangan bulat yang tak-nol. Kemudian diberikan beberapa matriks, yang mana perpangkatan ke-n dari matriks tersebut akan menghasilkan beberapa identitas, yaitu $\sum_{i=0}^{n} u_i^2$, $u_n u_{n+2}$, dan $\sum_{i=0}^{n} u_n u_{n+1}$ pada barisan (u_n). Selanjutnya juga dibahas fungsi pembangkit untuk perkalian suku-suku dalam bentuk $u_n u_{n+1}$ dan $u_n u_{n+2}$.

Kata kunci: *Barisan Fibonacci, barisan Lucas, fungsi pembangkit, matriks Vandermonde.*

1. PENDAHULUAN

Relasi berulang [2, h. 245] mendefinisikan suatu barisan dengan mengaitkan unsur ke-n dari barisan tersebut dengan elemen sebelumnya. Barisan Fibonacci dapat didefinisikan dalam bentuk relasi berulang [4, h. 6] yaitu,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{1}$$

dengan nilai awalnya $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$. Barisan Lucas juga dapat didefinisikan dalam bentuk relasi berulang [4, h. 8] yaitu,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \tag{2}$$

dengan nilai awalnya $L_1 = 1$ dan $L_2 = 3$.

Untuk jumlah kuadrat suku-suku barisan Fibonacci diberikan oleh [4, h. 77], yaitu

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}, \tag{3}$$

dan jumlah perkalian dua suku yang berurutan barisan Fibonacci diberikan oleh [4, h. 90],

$$\sum_{i=0}^{n} F_i F_{i+1} = F_{n+1}^2 - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}. \tag{4}$$

Pada [4, h. 229] diberikan fungsi pembangkit untuk perkalian dua suku yang berurutan pada barisan Fibonacci, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n = \frac{x}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}. \tag{5}$$

Barisan Fibonacci dan Lucas pada persamaan (1) dan (2) dapat digeneralisasi menjadi suatu barisan baru dan dapat ditentukan identitas-identitasnya. Pada artikel ini dibahas beberapa identitas pada generalisasi barisan Fibonacci yang merupakan review dan koreksi dari sebagian artikel E. Killic [3] yang berjudul "*Sums of the Square of Terms of Sequence* $\{u_n\}$".

Pembahasan dimulai dengan menggeneralisasi barisan Fibonacci dan Lucas. Kemudian pada bagian tiga dan empat akan diberikan beberapa matriks dan dari pangkat ke-$n$nya akan diperoleh identitas-identitas generalisasi barisan Fibonacci. Kemudian juga akan digeneralisasi persamaan (3) dan (4). Pada bagian lima akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk $u_n u_{n+1}$ dan $u_n u_{n+2}$.

2. GENERALISASI BARISAN FIBONACCI DAN LUCAS

Barisan Fibonacci dan Lucas digeneralisasi menjadi relasi berulang homogen linear berorde dua dengan koefisien konstan A yang selanjutnya disebut barisan (u_n) dan (v_n) [3] didefinisikan oleh

$$u_{n+1} = Au_n + u_{n-1}, \tag{6}$$

$$v_{n+1} = Av_n + v_{n-1}, \tag{7}$$

dengan A bilangan bulat yang tak-nol, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $v_0 = 2$, dan $v_1 = A$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan (6) dan (7) adalah $x^2 - Ax - 1 = 0$. Jika α dan β adalah akar persamaan karakteristik tersebut, dengan $\alpha = \frac{A+\sqrt{A^2+1}}{2}$ dan $\beta = \frac{A-\sqrt{A^2+1}}{2}$, maka formula Binet [3] untuk barisan (u_n) dan (v_n) didefinisikan oleh

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ dan } v_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Berikut diberikan alternatif formula untuk jumlah kuadrat suku-suku barisan (u_n).

Lema 1 [3] Misalkan u_n adalah suku ke-n pada barisan (u_n). Jumlah kuadrat suku-suku pada barisan tersebut, yaitu

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^2 = \frac{u_n u_{n+1}}{A}. \tag{8}$$

Bukti. Lema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$, berdasarkan persamaan (6), diperoleh

$$\sum_{i=0}^{1} u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 = 0 + 1 = \frac{(1)(A)}{A} = 1.$$

Misalkan untuk $n = k$ persamaan (8) benar, sehingga berlaku

$$\sum_{i=0}^{k} u_i^2 = \frac{u_k u_{k+1}}{A}.$$

Akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ juga benar, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 &= \sum_{i=0}^{k} u_i^2 + u_{k+1}^2\\ &= u_{k+1}\Big(\frac{u_k + Au_{k+1}}{A}\Big)\\ \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 &= \frac{u_{k+1}u_{k+2}}{A}.\end{aligned}$$

Karena untuk $n = k + 1$ benar, maka Lema 1 terbukti. □

3. JUMLAH KUADRAT SUKU-SUKU BARISAN (u_n)

Definisikan matriks T dan H_n,

$$T = \begin{bmatrix} u_3 & u_3 & -u_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

dan

$$H_n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n+1} u_i^2 & u_n u_{n+2} & -\sum_{i=0}^{n} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} u_i^2 & u_{n-1}u_{n+1} & -\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 & u_{n-2}u_n & -\sum_{i=0}^{n-2} u_i^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

dengan u_n adalah suku ke-n dari barisan (u_n).

Teorema 2 [3] Misalkan terdapat matriks T dan H_n seperti pada (9) dan (10), untuk $n > 1$, berlaku

$$T^n = H_n. \tag{11}$$

Bukti. Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 2$, berdasarkan persamaan (6), diperoleh

$$T^2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} u_i^2 & u_2u_4 & -\sum_{i=0}^{2} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{2} u_i^2 & u_1u_3 & -\sum_{i=0}^{1} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{1} u_i^2 & u_0u_2 & -\sum_{i=0}^{0} u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh $T^2 = H_2$. Misalkan untuk $n = k$ persamaan (11) benar, maka berlaku $T^k = H_k$, dengan $k > 1$. Akan ditunjukkan untuk $n = k+1$, dengan $k > 1$, juga benar. Asumsikan $T^{k+1} = T^kT$, sehingga diperoleh

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} (A^2+1)\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 + u_ku_{k+2} & (A^2+1)\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 - \sum_{i=0}^{k} u_i^2 & -\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 \\ (A^2+1)\sum_{i=0}^{k} u_i^2 + u_{k-1}u_{k+1} & (A^2+1)\sum_{i=0}^{k} u_i^2 - \sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 & -\sum_{i=0}^{k} u_i^2 \\ (A^2+1)\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 + u_{k-2}u_k & (A^2+1)\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 - \sum_{i=0}^{k-2} u_i^2 & -\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (6) dan Lema 1, entri baris kedua kolom pertama dari matriks T^{k+1}, yaitu

$$\begin{aligned} (A^2+1)\sum_{i=0}^{k} u_i^2 + u_{k-1}u_{k+1} &= (A^2+1)\frac{u_ku_{k+1}}{A} + u_{k-1}u_{k+1} \\ &= \frac{Au_{k+1}(Au_k + u_{k-1}) + u_ku_{k+1}}{A} \\ (A^2+1)\sum_{i=0}^{k} u_i^2 + u_{k-1}u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Kemudian dengan menggunakan cara yang sama seperti pada persamaan (12), akan diperoleh entri-entri lain pada matriks T^{k+1}. Sehingga matriks T^{k+1} menjadi

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k+2} u_i^2 & u_{k+1}u_{k+3} & -\sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{k+1} u_i^2 & u_k u_{k+2} & -\sum_{i=0}^{k} u_i^2 \\ \sum_{i=0}^{k} u_i^2 & u_{k-1}u_{k+1} & -\sum_{i=0}^{k-1} u_i^2 \end{bmatrix}.$$

Karena untuk $n = k + 1$ benar, maka persamaan (11) terbukti. □

Dari matriks T pada persamaan (9), diperoleh persamaan karakteristik yaitu $x^3 - (A^2 + 1)x^2 - (A^2 + 1)x + 1 = 0$. Akar karaktristik adalah $\gamma_1 = \frac{A^2+A\sqrt{A^2+4}}{2} + 1$, $\gamma_2 = \frac{A^2-A\sqrt{A^2+4}}{2} + 1$ dan $\gamma_3 = -1$, atau $\gamma_1 = \alpha^2$ dan $\gamma_2 = \beta^2$. Selanjutnya, didefinisikan matriks Vandermonde [3],

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks Λ diperoleh $\det \Lambda = A(A^2 + 4)^{\frac{3}{2}}$. Misal $V = \Lambda^t$. Misal $V_j^{(i)}$ adalah matriks yang diperoleh dari V dengan mengganti kolom ke-j dengan

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \gamma_1^{n-i+3} \\ \gamma_2^{n-i+3} \\ \gamma_3^{n-i+3} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3 [3] Misalkan $H_n = [h_{ij}]$ seperti pada (10), untuk $1 \leq i, j \leq 3$, berlaku

$$h_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det V}.$$

Bukti. Diketahui $T\Lambda = \Lambda D$, dengan $D = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Karena matriks T similar dengan matriks D, diperoleh $T^n\Lambda = \Lambda D^n$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh $H_n\Lambda = \Lambda D^n$. Sehingga diperoleh sistem persamaan linear,

$$\left.\begin{array}{l} h_{i1}\gamma_1^2 + h_{i2}\gamma_1 + h_{i3} = \gamma_1^{n-1+3} \\ h_{i1}\gamma_2^2 + h_{i2}\gamma_2 + h_{i3} = \gamma_2^{n-1+3} \\ h_{i1}\gamma_3^2 + h_{i2}\gamma_3 + h_{i3} = \gamma_3^{n-1+3} \end{array}\right\}. \tag{13}$$

Berdasarkan aturan Cramer [1, h. 83], diperoleh solusi untuk sistem persamaan linear (13) yaitu

$$h_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det V}.$$

Sehingga Teorema 3 terbukti. □

Selanjutnya, akan diberikan bentuk umum identitas $\sum_{i=0}^{n} u_i^2$ dan $u_n u_{n+2}$.

Akibat 4 [3] Untuk $n > 0$, berlaku

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^2 = \frac{v_{2n+1} + u_2(-1)^{n+1}}{A(A^2+4)},$$

dengan u_n dan v_n adalah suku ke-n dari barisan (u_n) dan (v_n).

Bukti. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$h_{21} = \sum_{i=0}^{n} u_i^2 = \frac{\det V_1^{(2)}}{\det V}.$$

Untuk $\det V_1^{(2)}$, diperoleh

$$\det V_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \gamma_1^{n+1} & \gamma_1 & 1 \\ \gamma_2^{n+1} & \gamma_2 & 1 \\ \gamma_3^{n+1} & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\det V_1^{(2)} = \sqrt{A^2+4}(v_{2n+1} + u_2(-1)^{n+1}).$$

Kemudian dari matriks V diperoleh $\det V = \det \Lambda$, sehingga Akibat 4 terbukti. □

Berdasarkan Akibat 4, untuk $A = 1$, diperoleh generalisasi persamaan (3) yaitu

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = \frac{L_{2n+1} + (-1)^{n+1}}{5},$$

dengan F_n dan L_n adalah suku ke-n dari barisan Fibonacci dan Lucas.

Akibat 5 Untuk $n > 0$, berlaku

$$u_n u_{n+2} = \frac{v_{2n+2} + v_2(-1)^{n+1}}{A^2+4},$$

dengan u_n dan v_n adalah suku ke-n dari barisan (u_n) dan (v_n).

Bukti. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$h_{12} = u_n u_{n+2} = \frac{\det V_2^{(1)}}{\det V}.$$

Untuk $\det V_2^{(1)}$, diperoleh

$$\det V_2^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_1^{n+2} & 1 \\ \gamma_2^2 & \gamma_2^{n+2} & 1 \\ \gamma_3^2 & \gamma_3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$
$$\det V_2^{(1)} = A\sqrt{A^2+4}(v_{2n+2} + v_2(-1)^{n+1}).$$

Kemudian dari matriks V diperoleh $\det V = \det \Lambda$, sehingga Akibat 5 terbukti. □

Berdasarkan Akibat 5, untuk $A = 1$, diperoleh

$$F_n F_{n+2} = \frac{L_{2n+2} + 3(-1)^{n+1}}{5},$$

dengan F_n dan L_n adalah suku ke-n dari barisan Fibonacci dan Lucas.

Akibat 6 [3] Untuk $n > 0$, x_n memenuhi relasi berulang (x_n),

$$x_{n+2} = u_3 x_{n+1} + u_3 x_n - x_{n-1},$$

dengan x_n adalah $\frac{u_n u_{n+1}}{A} = \sum_{i=0}^{n} u_i^2$ atau $u_n u_{n+2}$.

Bukti. Untuk $n = 1$, $T = H$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh

$$H_{n+1} = T^{n+1} = T^n T = H_n T = H_n H.$$

Dari perkalian matriks $H_{n+1} = H_n H$, diperoleh persamaan

$$x_{n+2} = u_3 x_{n+1} + u_3 x_n - x_{n-1}. \ \square$$

4. JUMLAH PERKALIAN DUA SUKU BERURUTAN BARISAN (u_n)

Misalkan G adalah perluasan dari matriks T pada (9), sehingga

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u_3 & u_3 & -u_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Kemudian, untuk $n > 0$, misalkan

$$C_n = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{n} u_i u_{i+1}. \tag{15}$$

Definisikan matriks Q_n yaitu,

$$Q_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_n & \frac{u_{n+1}u_{n+2}}{A} & u_n u_{n+2} & -\frac{u_n u_{n+1}}{A} \\ C_{n-1} & \frac{u_n u_{n+1}}{A} & u_{n-1}u_{n+1} & -\frac{u_{n-1}u_n}{A} \\ C_{n-2} & \frac{u_{n-1}u_n}{A} & u_{n-2}u_n & -\frac{u_{n-2}u_{n-1}}{A} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Teorema 7 [3] Misal matriks G dan Q_n yang diberikan oleh (14) dan (16). Untuk $n > 2$, berlaku

$$G^n = Q_n. \tag{17}$$

Bukti. Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematika. Berdasarkan persamaan (6) dan (15), untuk $n = 3$, diperoleh

$$G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & \frac{u_4 u_5}{A} & u_3 u_5 & -\frac{u_3 u_4}{A} \\ C_2 & \frac{u_3 u_4}{A} & u_2 u_4 & -\frac{u_2 u_3}{A} \\ C_1 & \frac{u_2 u_3}{A} & u_1 u_3 & -\frac{u_1 u_2}{A} \end{bmatrix}.$$

Misalkan untuk $n = k$, $k > 2$, persamaan (17) benar. Akan ditunjukkan untuk $n = k+1$, $k > 2$, juga benar. Asumsikan $G^{k+1} = G^k G$. Berdasarkan persamaan (6) dan (15), diperoleh

$$G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_{k+1} & \frac{u_{k+2}u_{k+3}}{A} & u_{k+1}u_{k+3} & -\frac{u_{k+1}u_{k+2}}{A} \\ C_k & \frac{u_{k+1}u_{k+2}}{A} & u_k u_{k+2} & -\frac{u_k u_{k+1}}{A} \\ C_{k-1} & \frac{u_k u_{k+1}}{A} & u_{k-1}u_{k+1} & -\frac{u_{k-1}u_k}{A} \end{bmatrix}.$$

Karena untuk $n = k+1$, $k > 2$, juga benar, sehingga Teorema 7 terbukti. □

Akibat 8 [3] Untuk $n > 0$, C_n memenuhi relasi berulang nonhomogen,

$$C_{n+1} = (A^2+1)C_n + (A^2+1)C_{n-1} - C_{n-2} + 1,$$

dengan C_n yang diberikan oleh (15).

Bukti. Untuk $n = 1$, $G = Q$. Berdasarkan Teorema 7, diperoleh

$$Q_{n+1} = G^{n+1} = G^n G = Q_n G = Q_n Q.$$

Dari perkalian matriks $Q_{n+1} = Q_n Q$, diperoleh

$$C_{n+1} = (A^2+1)C_n + (A^2+1)C_{n-1} - C_{n-2} + 1. \ \square$$

Selanjutnya didefinisikan matriks E dan D_1,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2A^2} & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \\ \frac{-1}{2A^2} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \frac{-1}{2A^2} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dan

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix},$$

dengan γ_i, $1 \leq i \leq 3$, akar karateristik dari matriks T yang diberikan oleh (9). Berikut diberikan bentuk umum identitas $\sum_{i=0}^{n} u_i u_{i+1}$.

Teorema 9 Untuk $n > 0$, jumlah perkalian dua suku yang berurutan diberikan oleh

$$\sum_{i=0}^{n} u_i u_{i+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n u_{n+2} - 1}{2A},$$

dengan u_n adalah suku ke-n dari barisan (u_n).

Bukti. Diketahui $GE = ED_1$. Karena matriks G similar dengan matriks D_1, diperoleh $G^nE = ED_1^n$. Berdasarkan Teorema 7, diperoleh $Q_nE = ED_1^n$. Dari perkalian matriks $Q_nE = ED_1^n$, diperoleh

$$C_n = \frac{1}{2A^2}\big(\frac{u_{n+1}u_{n+2}}{A} + u_nu_{n+2} - \frac{u_nu_{n+1}}{A} - 1\big).$$

Berdasarkan persamaan (6) dan persamaan (15), diperoleh

$$\sum_{i=0}^{n} u_iu_{i+1} = \frac{u_{n+1}^2 + u_nu_{n+2} - 1}{2A}.$$

Sehingga diperoleh bentuk umum untuk $\sum\limits_{i=0}^{n} u_iu_{i+1}$ dan Teorema 9 terbukti. □

Berdasarkan Teorema 9, untuk $A = 1$, diperoleh generalisasi persamaan (4), yaitu

$$\sum_{i=0}^{n} F_iF_{i+1} = \frac{F_{n+1}^2 + F_nF_{n+2} - 1}{2}.$$

dengan F_n adalah suku ke-n dari barisan Fibonacci.

5. FUNGSI PEMBANGKIT UNTUK u_nu_{n+1} DAN u_nu_{n+2}

Pandang persamaan (5). Kemudian akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk u_nu_{n+1} . Misal

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nu_{n+1}x^n. \tag{18}$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (18) terhadap u_3x, u_3x^2, dan x^3, diperoleh

$$u_3xg(x) = u_0u_1u_3x + u_1u_2u_3x^2 + u_2u_3u_3x^3 + u_3u_4u_3x^4 + \cdots , \tag{19}$$

$$u_3x^2g(x) = u_0u_1u_3x^2 + u_1u_2u_3x^3 + u_2u_3u_3x^4 + u_3u_4u_3x^5 + \cdots , \tag{20}$$

$$x^3g(x) = u_0u_1x^3 + u_1u_2x^4 + u_2u_3x^5 + u_3u_4x^6 + \cdots . \tag{21}$$

Selanjutnya persamaan (18) dikurangi persamaan (19), (20) dan ditambah persamaan (21), diperoleh

$$\begin{aligned}(1 - u_3x - u_3x^2 + x^3)g(x) &= u_0u_1 + (u_1u_2 - u_0u_1u_3)x + (u_2u_3 - u_1u_2u_3 - u_0u_1u_3)x^2 \\ &\quad + \cdots + (u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_nu_3 - u_{n-2}u_{n-1}u_3 \\ &\quad + u_{n-3}u_{n-2})x^n + \cdots \\ &= 0 + u_2x + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ g(x) &= \frac{u_2x}{1 - u_3x - u_3x^2 + x^3}. \end{aligned} \tag{22}$$

Berdasarkan $g(x)$ pada persamaan (18), maka persamaan (22) adalah fungsi pembangkit untuk $u_n u_{n+1}$. Selanjutnya dengan cara yang sama, akan dikonstruksi fungsi pembangkit untuk $u_n u_{n+2}$. Misal

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n+2} x^n. \tag{23}$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (23) terhadap $u_3 x$, $u_3 x^2$, dan x^3, diperoleh

$$u_3 x h(x) = u_0 u_2 u_3 x + u_1 u_3 u_3 x^2 + u_2 u_4 u_3 x^3 + u_3 u_5 u_3 x^4 + \cdots, \tag{24}$$

$$u_3 x^2 h(x) = u_0 u_2 u_3 x^2 + u_1 u_3 u_3 x^3 + u_2 u_4 u_3 x^4 + u_3 u_5 u_3 x^5 + \cdots, \tag{25}$$

$$x^3 h(x) = u_0 u_2 x^3 + u_1 u_3 x^4 + u_2 u_4 x^5 + u_3 u_5 x^6 + \cdots. \tag{26}$$

Selanjutnya persamaan (23) dikurangi persamaan (24), (25) dan ditambah persamaan (26), diperoleh

$$\begin{aligned}
(1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3) h(x) &= u_0 u_2 + (u_1 u_3 - u_0 u_2 u_3) x + (u_2 u_4 - u_1 u_3 u_3 - u_0 u_2 u_3) x^2 \\
&\quad + \cdots + (u_n u_{n+2} - u_{n-1} u_{n+1} u_3 - u_{n-2} u_n u_3 \\
&\quad + u_{n-3} u_{n-1}) x^n + \cdots \\
&= 0 + u_3 x - x^2 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\
h(x) &= \frac{u_3 x - x^2}{1 - u_3 x - u_3 x^2 + x^3}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Berdasarkan $h(x)$ pada persamaan (23), maka persamaan (27) adalah fungsi pembangkit untuk $u_n u_{n+2}$. Jika diambil $A = 1$, maka persamaan (27) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+2} x^n = \frac{2x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3},$$

yang merupakan fungsi pembangkit untuk $F_n F_{n+2}$ pada barisan Fibonacci.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima.* Terj. dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition*, oleh Silaban, P. & I.N. Susila. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Johnsonbaugh, R. 1997. *Matematika Diskrit Edisi Keempat Jilid 1.* Terj. dari *Discrete Mathematics*, *Forth Edition*, oleh Djunaedi, Drs. D. Penerbit PT. Prenhallindo, Jakarta.

[3] Killic, E. 2008. Sums of the Square of Term of Sequence $\{u_n\}$. *Proc. Indian Acad. Sci.* (*Math. Sci*), **118** (1): 27-41.

[4] Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Number with Applications.* John Wiley & Sons, Inc. New York.